

Γραμμική Άλγεβρα II
Φροντιστηριακές ασκήσεις #5, Απρίλιος 2016, Διαδικασία
Gram-Schmidt

- ✓. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου V που παράγεται από τα διανύσματα

$$u_1 = (1, 1, 0, 0), \quad u_2 = (0, -1, 0, 2)$$

και να την συμπληρώσετε σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

- ✓. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}_3[x]$, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου V που παράγεται από τα $1, x, x^2$.

- ✓. Έστω

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$$

και

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0, 2x + y - 3z = 0\}$$

υπόχωροι του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Να βρείτε:

(α) Ορθοκανονικές βάσεις των V και W .

(β) Την ορθογώνια προβολή του διανύσματος $(1, 1, 1)$ στον υπόχωρο V .

4. Δείξτε ότι οι υπόχωροι

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

και

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$$

του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^4$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο είναι ορθοσυμπληρωματικοί.

Γραμμική Άλγεβρα II

14/4/2016

$$V = \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s \rangle \subseteq E$$

$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_s$ βάση του V που αποτελείται από ορθογώνια διανύσματα
 $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_s$ βάση του V που αποτελείται από ορθοκανονικά διανύσματα.

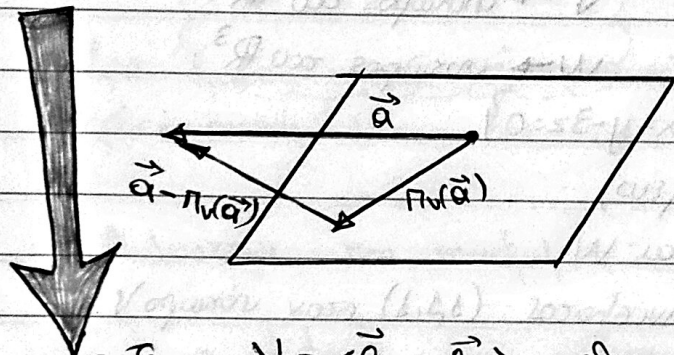
$$\vec{a} \in E \quad \Pi_V(\vec{a}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \cdot \vec{b}_1 + \dots + \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}_s \rangle}{\langle \vec{b}_s, \vec{b}_s \rangle} \cdot \vec{b}_s =$$

$$= \langle \vec{a}, \vec{f}_1 \rangle \cdot \vec{f}_1 + \dots + \langle \vec{a}, \vec{f}_s \rangle \cdot \vec{f}_s$$

ορθογώνια προβολή του $\vec{a}$ στο V .

Για να το επαρκέσω πρέπει να έχω ή ορθογώνια βάση ή ορθοκανονικά.

Πρόταση: Το διάνυσμα $\vec{a} - \Pi_V(\vec{a})$ είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του V .



Απόδειξη: $V = \langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s \rangle$ ορθογώνια βάση του V .
 $\vec{a} - \Pi_V(\vec{a}) \perp \vec{v}$ για κάθε $\vec{v} \in V$.

Έστω $1 \leq i \leq s$

$$\langle \vec{a} - \Pi_V(\vec{a}), \vec{b}_i \rangle = \langle \vec{a} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 - \dots - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}_i \rangle}{\langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle} \vec{b}_i - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}_s \rangle}{\langle \vec{b}_s, \vec{b}_s \rangle} \vec{b}_s, \vec{b}_i \rangle$$

Συμπίπτουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι διαφορετικό από έλαφε:

$$= \langle \vec{a}, \vec{b}_i \rangle - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \langle \vec{b}_1, \vec{b}_i \rangle - \dots - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}_i \rangle}{\langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle} \langle \vec{b}_i, \vec{b}_i \rangle - \dots - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b}_s \rangle}{\langle \vec{b}_s, \vec{b}_s \rangle} \langle \vec{b}_s, \vec{b}_i \rangle, \vec{b}_i \rangle = 0$$

Έστω $\vec{v} \in V = \langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_s \rangle$ (αφού είναι βάση) $\Rightarrow \vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_s \vec{b}_s$.

$$\langle \vec{a}, \pi_V(\vec{a}) \rangle, \vec{v} \rangle = \langle \vec{a} - \pi_V(\vec{a}), \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_s \vec{b}_s \rangle =$$

$$= \lambda_1 \langle \vec{a} - \pi_V(\vec{a}), \vec{b}_1 \rangle + \dots + \lambda_s \langle \vec{a} - \pi_V(\vec{a}), \vec{b}_s \rangle = 0$$

Διαδικασία Gram-Schmidt.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ Γ.Α.

Στην περίπτωση $\bullet \vec{b}_1 = \vec{a}_1$

$\bullet \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \pi_{\langle \vec{a}_1 \rangle}(\vec{a}_2) = \vec{a}_2 - \pi_{\langle \vec{b}_1 \rangle}(\vec{a}_2)$

$\bullet \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \pi_{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle}(\vec{a}_3) \rightarrow$ Είναι κάθετο στα $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ και σε οποιοδήποτε διάνυσμα παράγεται από αυτά.

$\vdots$
 $\bullet \vec{b}_n = \vec{a}_n - \pi_{\langle \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_{n-1} \rangle}(\vec{a}_n)$

Φυλλάδιο #5

Άσκηση 3

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$$

$V \rightarrow$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

$W \rightarrow$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0, 2x + y - 3z = 0\}$$

(με το γνωστό εσωτερικό γινόμενο)

(i) ΝΒ. ορθοκανονικές βάσεις των V και W

(ii) ΝΒ. των ορθογώνια προβολή του διανύσματος $(1, 1, 1)$ στον υπόχωρο V .

Λύση: (i) Έχουμε $x - y - z = 0$ και διαμετράμε τον εναυξημένο $\rightarrow$ του κάνουμε κλινοκωτό $\rightarrow$ δίνουμε παραμέτρους εκεί που δεν υπάρχουν άρχιες μονάδες:

Εναυξημένος: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$

άρα $x = s + t$

$y = s$

$z = t$

$$V = \{(s+t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \{s(1, 1, 0) + t(1, 0, 1) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle.$$

Είναι βάση? Αρκεί να τα 2 διανύσματα να μην είναι.

Δεν είναι γε. Κάθε ένα από αυτά δεν είναι πολλαπλό του άλλου $\Rightarrow (1, 1, 0), (1, 0, 1)$ πα άρα βάση του χώρου.

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$

► Βρίσκει μια βάση, όπως επίσης υπολογίζονται βάσεις, άρα εφαρμόζεται το θεωρήμα Gram-Schmidt.

$$\vec{a}_1 = (1, 1, 0), \vec{a}_2 = (1, 0, 1)$$

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = (1, 1, 0)$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \Pi_{\langle \vec{b}_1 \rangle}(\vec{a}_2) = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \cdot \vec{b}_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2} (1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

Ελεγχος $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = 0$ άρα είναι κάθετα $\rightarrow$ έχω τώρα βάση ως προς τις πρώτες

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{b}_1\|} \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\|\vec{b}_2\|} \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

Άρα βρίσκουμε μια ορθοκανονική βάση του V , τώρα θα βρούμε μία ορθοκανονική βάση του W :

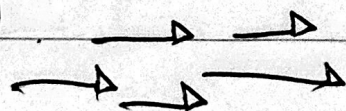
Αντικαθιστώ τον εναυξήσιμο:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -3 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{επίλυση}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array}$$

Άρα προκύπτει: $W = \{(t, t, t) | t \in \mathbb{R}\} = \{t(1, 1, 1) | t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1) \rangle$.
Είναι για διάνυσμα του χώρου, άρα βάση.

$$\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{b}\|} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} (1, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$



$$(ii) \quad \Pi_V((1,1,1)) = \underline{\langle (1,1,1), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \rangle} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) +$$

$$\overset{\substack{\text{Μαζι} \\ \text{είναι ορθογώνιο} \\ \text{πίεση}}}{\text{1}} \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + \frac{\sqrt{6}}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right) =$$

$$= (1,1,0) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$= \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \cdot \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0=5x-4y+z \\ 0=5x \end{array}$$

$$\langle (1,1,1), \vec{v} \rangle = \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Ιδιότητες Ορθοκανονικών Βάσεων

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Ευκλείδειος χώρος

(i) $\{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2, \dots, \vec{\delta}_n\}$ ορθοκανονική βάση του E
 $\vec{x}, \vec{y} \in E$

$$\vec{x} = x_1 \vec{\delta}_1 + \dots + x_n \vec{\delta}_n$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{\delta}_1 + \dots + y_n \vec{\delta}_n$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle x_1 \vec{\delta}_1 + \dots + x_n \vec{\delta}_n, y_1 \vec{\delta}_1 + \dots + y_n \vec{\delta}_n \rangle =$$

$$= x_1 \langle \vec{\delta}_1, y_1 \vec{\delta}_1 + y_2 \vec{\delta}_2 + \dots + y_n \vec{\delta}_n \rangle + x_2 \langle \vec{\delta}_2, y_1 \vec{\delta}_1 + y_2 \vec{\delta}_2 + \dots + y_n \vec{\delta}_n \rangle + \dots + x_n \langle \vec{\delta}_n, y_1 \vec{\delta}_1 + y_2 \vec{\delta}_2 + \dots + y_n \vec{\delta}_n \rangle =$$

$$= x_1 y_1 \langle \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_1 \rangle + x_1 y_2 \langle \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2 \rangle + \dots + x_1 y_n \langle \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_n \rangle + x_2 y_1 \langle \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_1 \rangle + x_2 y_2 \langle \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_2 \rangle + \dots + x_2 y_n \langle \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_n \rangle + \dots + x_n y_1 \langle \vec{\delta}_n, \vec{\delta}_1 \rangle + x_n y_2 \langle \vec{\delta}_n, \vec{\delta}_2 \rangle + \dots + x_n y_n \langle \vec{\delta}_n, \vec{\delta}_n \rangle =$$

$$= x_1 y_1 \langle \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_1 \rangle + x_2 y_2 \langle \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_2 \rangle + \dots + x_n y_n \langle \vec{\delta}_n, \vec{\delta}_n \rangle =$$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n$$

Άρα προκύπτει:

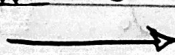
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

!!

(ii) $\vec{x} = x_1 \vec{\delta}_1 + x_2 \vec{\delta}_2 + \dots + x_n \vec{\delta}_n$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

(*)



(*) Τα διανύσματα $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2, \dots, \vec{\delta}_n$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του E άρα είναι μήκος 1

(iii) Εσωτερικό γινόμενο του χώρου (δεν έχει καμία σχέση με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο).

$$\langle \vec{x}, \vec{\delta}_1 \rangle = \langle x_1 \vec{\delta}_1 + \dots + x_n \vec{\delta}_n, \vec{\delta}_1 \rangle = x_1 \langle \vec{\delta}_1, \vec{\delta}_1 \rangle + x_2 \langle \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_1 \rangle + \dots + x_n \langle \vec{\delta}_n, \vec{\delta}_1 \rangle = x_1 \quad (\text{Έτσι βρίσκω το } x_1)$$

$$\text{Αν } \vec{x} = x_1 \vec{\delta}_1 + \dots + x_i \vec{\delta}_i + \dots + x_n \vec{\delta}_n \text{ τότε } x_i = \langle \vec{x}, \vec{\delta}_i \rangle$$

!!

Άσκηση 2 χώρος : $\mathbb{R}_3[x]$ (πολυώνυμα βαθμού το πολύ 3)
 Εσωτερικό γινόμενο : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$.

Να μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου V , να παράχεται από τα διυόμενα $1, x, x^2$.

Λύση: Εφαρμόζω το θεώρημα Gram-Schmidt
 $\vec{a}_1 = 1, \vec{a}_2 = x, \vec{a}_3 = x^2$.

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = 1.$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 \stackrel{(*)}{=} x - \frac{1}{1} = x - \frac{1}{2}$$

$$(*) \quad \langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1.$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \vec{b}_1 - \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle} \vec{b}_2 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 - \frac{\langle x^2, x - \frac{1}{2} \rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle} \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad (*)$$

$$(*) \quad \langle x^2, 1 \rangle = 1.$$

$$\langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \langle x^2, x - \frac{1}{2} \rangle &= \int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} x \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

→ → →

Συνολικά $b_3 \stackrel{(*)}{=} x^2 - \frac{1/3}{1} - \frac{1/12}{1/12} (x - \frac{1}{2}) = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

Ανταδίδι έχουμε βρεί τα ορθογώνια διανύσματα:

$$\vec{b}_1 = 1, \quad \vec{b}_2 = x - \frac{1}{2}, \quad \vec{b}_3 = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Ναυ μένει να τα κάνω ορθοκανονικά διαγράφοντας το κάθε ένα με το μήκος του:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|} = 1, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|} = \frac{\vec{b}_2}{\sqrt{1/12}} = \sqrt{12} \cdot (x - \frac{1}{2})$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{\|\vec{b}_3\|} = \frac{1}{(*)} (x^2 - x + \frac{1}{6})$$

$$(*) \quad \|\vec{b}_3\|^2 = \langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6} \rangle = \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 dx =$$

$$= \int_0^1 (x^4 + x^2 + \frac{1}{36} - 2x^3 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3}) dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{36} \cdot x - 2 \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1}{180}$$

Άρα $\|\vec{b}_3\| = \sqrt{\frac{1}{180}}$ και άρα $\vec{e}_3 = \sqrt{180} (x^2 - x + \frac{1}{6})$.

Άρα η ορθοκανονική βάση είναι η:

$$\vec{e}_1 = 1, \quad \vec{e}_2 = \sqrt{12} (x - \frac{1}{2}), \quad \vec{e}_3 = \sqrt{180} (x^2 - x + \frac{1}{6})$$

Ορισμός : Έστω V υποχώρος του Ευκλείδειου χώρου E .
 Τότε ορίζουμε ως ορθόγωνο συμπλήρωμα του V το σύνολο
 $V^\perp = \{ \vec{a} \in E \mid \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \ \forall \vec{b} \in V \}$

Πρόταση : Το $V^\perp$ είναι υποχώρος του E .

Απόδειξη : $\langle \vec{0}, \vec{b} \rangle = 0 \ \forall \vec{b} \in V \Rightarrow \vec{0} \in V^\perp$
 Έστω $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in V^\perp \Rightarrow \langle \vec{a}_1, \vec{b} \rangle = 0 \ \forall \vec{b} \in V$
 $\langle \vec{a}_2, \vec{b} \rangle = 0$

$$\langle \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}_2, \vec{b} \rangle = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \in V^\perp$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \vec{a} \in V^\perp : \langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda \vec{a} \in V^\perp$$

Πρόταση : Έστω $\vec{a} \in E$ τότε το $\vec{a} - \pi_V(\vec{a}) \in V^\perp$

Εφόσον το $\vec{a} - \pi_V(\vec{a})$ είναι κάθετο σε οποιοδήποτε διάνυσμα του V
 τότε προφανώς ανήκει στο ορθόγωνο συμπλήρωμά του.

Δείκτημα : Έστω E Ευκλείδειος χώρος και V υποχώρος του E τότε:

(i) $E = V \oplus V^\perp$ (εξού άθροισμα)

(ii) $(V^\perp)^\perp = V$

Απόδειξη : (i) Για να είναι $E = V \oplus V^\perp$ αρκεί νάο $E = V + V^\perp$ και $V \cap V^\perp = \{ \vec{0} \}$.

Έχουμε $\vec{a} \in E$, $\vec{a} = \underbrace{\pi_V(\vec{a})}_{\in V} + \underbrace{(\vec{a} - \pi_V(\vec{a}))}_{\in V^\perp} \Rightarrow E = V + V^\perp$

Έστω $\vec{u} \in V \cap V^\perp \Rightarrow \vec{u} \in V$ και $\vec{u} \in V^\perp \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Άρα το μοναδικό διάνυσμα της τομής είναι το μηδενικό:
 $V \cap V^\perp = \{ \vec{0} \}$.

Άρα $E = V \oplus V^\perp$.

(ii) Έχουμε : $(V^\perp)^\perp = \{ \vec{x} \in E \mid \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0, \forall \vec{a} \in V^\perp \}$

Αρκεί να ο $(V^\perp)^\perp \supseteq V$ και $(V^\perp)^\perp \subseteq V$

Έστω $\vec{0} \in V \rightarrow \langle \vec{0}, \vec{u} \rangle = 0 \quad \forall \vec{u} \in V^\perp \rightarrow \vec{0} \in V (V^\perp)^\perp$ Άρα $V \subseteq (V^\perp)^\perp$

Έστω $\vec{u} \in (V^\perp)^\perp$. Το $\vec{u}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο:

$$\vec{u} = \underbrace{\vec{u}_1}_{\in V} + \underbrace{\vec{u}_2}_{\in V^\perp} \text{ αφού } E = V \oplus V^\perp$$

► Πώς δείχνω ότι ένα διάνυσμα είναι το μηδενικό ($\vec{0}$) σε έναν Ευκλείδειο χώρο?

► Αρκεί να το μήκος του είναι 0.

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \cancel{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle} + \langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 = \vec{0} \text{ άρα } \vec{u} = \vec{u}_1 \in V.$$

Άρα $(V^\perp)^\perp \subseteq V$.

$$\text{Αφού } (V^\perp)^\perp \subseteq V \text{ και } (V^\perp)^\perp \supseteq V \Rightarrow \underline{(V^\perp)^\perp = V}$$

Πρόταση: Δύο υποχώροι V, W του E ονομάζονται ορθογώνιοι αν ο ένας είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του άλλου.

$$W = V^\perp \iff W^\perp = (V^\perp)^\perp \iff W^\perp = V$$

Φύλλο #5

Άσκηση 4

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$$

υπόχωροι του
εγκλείδωτου χώρου
 $\mathbb{R}^4$ με το συνήθες
εσωτερικό γινόμενο.

Ναο είναι ορθογώνιοι.

Λύση:

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} =$$

$$= \{(x_1, x_1, x_1, x_1) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$$

$$W^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (s, s, s, s) \rangle = 0, \forall (s, s, s, s) \in W\} =$$

(Αφού ισχύει $\forall (s, s, s, s) \in W$ θα ισχύει και για $(1, 1, 1, 1) \in W$)

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1, 1, 1, 1) \rangle = 0\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} = V$$

Άρα V, W ορθογώνιοι.



Ορισμός: Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Ευκλείδειος χώρος και $\vec{a}, \vec{b} \in E$.

Ορίζουμε ως απόσταση των διανυσμάτων το μήκος του διανυσματος $\vec{a} - \vec{b}$.

$$\text{Άρα } d(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} - \vec{b}\|.$$

Ιδιότητες της Απόστασης:

$$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto d(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} - \vec{b}\|$$

(i) $d(\vec{a}, \vec{b}) \geq 0$ (αφού $d(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} - \vec{b}\| \geq 0$)

(ii) $d(\vec{a}, \vec{b}) = d(\vec{b}, \vec{a})$ (αφού $d(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} - \vec{b}\| = \|\vec{b} - \vec{a}\| = d(\vec{b}, \vec{a})$)

(iii) $\forall d(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \iff \vec{a} = \vec{b}$ (αφού $d(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \iff \|\vec{a} - \vec{b}\| = 0 \iff \vec{a} - \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} = \vec{b}$)

(iv) $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in E$
 $d(\vec{a}, \vec{c}) \leq d(\vec{a}, \vec{b}) + d(\vec{b}, \vec{c})$ } τριγωνική ανίσωση !!!

$$(\text{Αφού } d(\vec{a}, \vec{c}) = \|\vec{a} - \vec{c}\| = \|(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{b} - \vec{c})\| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\| + \|\vec{b} - \vec{c}\| \leq d(\vec{a}, \vec{b}) + d(\vec{b}, \vec{c}))$$

Ορισμός: Έστω $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Ευκλείδειος χώρος και $\vec{a} \in E$ και V υποχώρος του E .
Ορίζουμε απόσταση του $\vec{a}$ από το V το μήκος του διανυσματος $\vec{a} - n_V(\vec{a})$.

$$d(\vec{a}, V) = \|\vec{a} - n_V(\vec{a})\|$$

$\forall d(\vec{a}, V) = 0 \implies$ το διάνυσμα είναι στον χώρο.